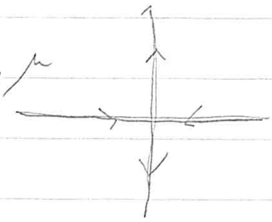
(L4) VARIETÀ STABILE ED INSTABILE

Cominciamo con un esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e autovalori $-\lambda, \mu$

$x = e^{-\lambda t} x_0$
$y = e^{\mu t} y_0$



Adesso perturbiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x \\ \dot{y} = \mu y + x^2 \end{cases}$$

pt. di eq. è $(0,0)$ come prima, che è pto di sella,
Studiamo il sistema:

$x(t) = e^{-\lambda t} x_0$ è sol di 1^a

$$\dot{y} = \mu y + e^{-2\lambda t} x_0^2 \Rightarrow y(t) = e^{\mu t} y_0 + \int_0^t e^{\mu(t-s)} e^{-2\lambda s} x_0^2$$

$$= e^{\mu t} y_0 + e^{\mu t} \int_0^t e^{-(2\lambda+\mu)s} x_0^2$$

$$= e^{\mu t} y_0 + e^{\mu t} \left. \frac{e^{-(2\lambda+\mu)s}}{-(2\lambda+\mu)} \right|_0^t x_0^2$$

$$e^{\mu t} y_0 + e^{\mu t} \frac{1 - e^{-(2\lambda+\mu)t}}{\mu+2\lambda} x_0^2 =$$

Quindi

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\lambda t} x_0 \\ y(t) = e^{\mu t}\left(y_0 + \dfrac{x_0^2}{\mu+2\lambda}\right) - \dfrac{e^{-2\lambda t}}{\mu+2\lambda} x_0^2 \end{cases}$$

è la soluzione.

Domanda: $\exists$ dati iniziali per cui $(x(t), y(t)) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$?

OSS Nel caso lineare basta prendere $y_0 = 0$

Ora se $y_0 = 0$, $y(t) = e^{\mu t} \dfrac{x_0^2}{\mu+2\lambda} - e^{-2\lambda t} \dfrac{x_0^2}{\mu+2\lambda} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

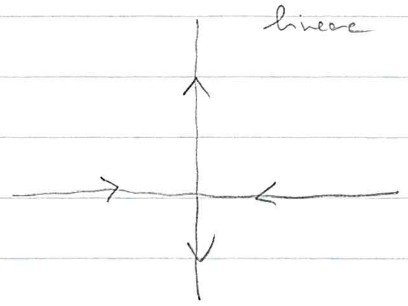
tranne che per $x_0 = 0$.

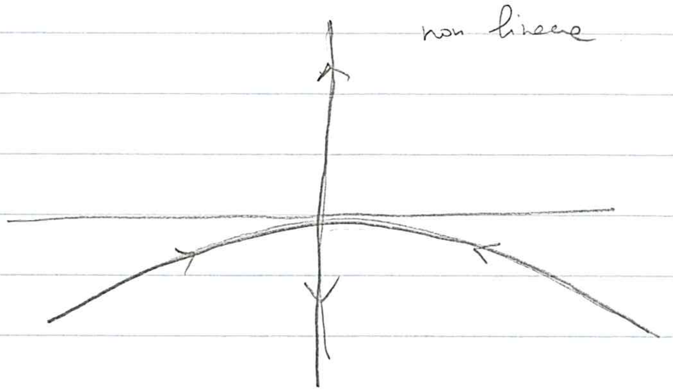
Quindi la varietà stabile lineare invariante non è + invariante.

Cerco soluz. per cui $y(t) \to 0$.

In particolare, l'unica possibilità è che il coeff. di $e^{\mu t}$ sia 0. Quindi se $y_0 + \dfrac{x_0^2}{\mu+2\lambda} = 0$, allora la soluz. è $y(t) = e^{-2\lambda t}\frac{x_0^2}{2\lambda+\mu} \to 0$

Abbiamo trovato che tutti i punti che stanno su $y = -\frac{x_0^2}{2\lambda+\mu}$ convergono a 0!





Inoltre se partiamo su $y + \frac{x^2}{2\lambda+\mu} = 0$, allora ci restiamo sopra:

$$y(t) + \frac{x^2(t)}{2\lambda+\mu} = e^{\mu t}\overbrace{\left(y_0 + \frac{x_0^2}{2\lambda+\mu}\right)}^{=0} - e^{-2\lambda t}\frac{x_0^2}{2\lambda+\mu} + e^{-2\lambda t}\frac{x_0^2}{2\lambda+\mu} =$$

$$= 0$$

Ovvero $y = \frac{-x^2}{2\lambda+\mu}$ è varietà invariante stabile

In modo analogo, se $x_0 = 0$, allora $y(t) = e^{\mu t}$

Varietà invariante instabile

In questo caso, vediamo che le varietà stabile ed instabile lineare sono sopravvissute alla perturbazione e si sono deformate in curve invarianti.

Il teorema della varietà stabile ed instabile dice che questo è un fenomeno generale, che capita per qualsiasi punto iperbolico

$D_x f(\bar{x})$ ha autovalori con $Re(\lambda) \neq 0$.

Def (varietà stabile / instabile locale). Dato $\delta > 0$,

$W^s_{loc}(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \delta \mid \phi^t(x) \to 0 \text{ per } t \to +\infty\}$

$W^u_{loc}(\delta) = \{\qquad\qquad \mid \phi^t(x) \to 0 \text{ per } t \to -\infty\}$

Teo (Varietà stabile ed instabile nel piano) Consideriamo in $\mathbb{R}^2$

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + f(x,y) \\ \dot{y} = \mu y + g(x,y) \end{cases}, \quad \lambda, \mu > 0$$

e $f, g \in C^1$ tali che $f(0,0) = g(0,0) = 0$,
$df(0,0) = dg(0,0) = 0$

Allora $\exists\ \delta > 0$ tc. in una bolla di centro 0 e raggio δ vale che
(i) $W^s_{loc}(\delta)$ è una curva di classe C^1 tangente all'asse x nell'origine

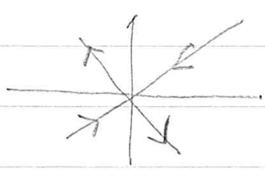
(ii) $W^u_{loc}(\delta)$ è una curva di classe C^1 tangente all'asse y nell'origine.

OSS Dimostreremo che $W^s_{loc}(\varepsilon)$ è il grafico di una funzione, ovvero è descritto da $(x, u(x))$, dove $u: \{x : \|x\| < \varepsilon\} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e soddisfa $u(0) = u'(0) = 0$
In realtà, mostreremo qui soltanto che u esiste, e non la regolarità

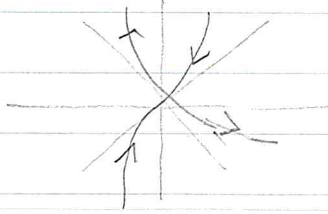
OSS Se $f, g \in C^2 \Rightarrow u$ e v sono di classe C^2

OSS Dimostreremo solo l'esist della varietà stabile. Quella instabile si ottiene semplicemente invertendo la direzione del tempo.

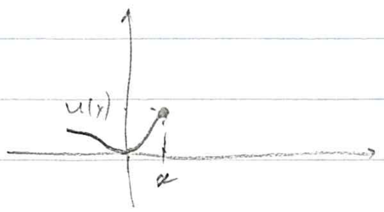
OSS Il sistema $(*)$ è già in "forma normale", nel senso che la matrice A del linearizzato è in forma diagonale. Nel caso non lo fosse, la curva stabile ed instabile sono tangenti nel pto di equilibrio agli autovettori stabili ed instabili



$\rightsquigarrow$



dim Costruiamo la varietà stabile. Dimostriamo che per ogni x suff piccolo, $\exists$ fzn $u(x)$ tale che $u(0)=0=u'(0)=0$ e che $(x, u(x))$ descrive la curva stabile



La dimostrazione si basa in 3 step:

Step 1: caratterizziamo le soluzioni di $(*)$ che restano in un intorno di 0 tramite eq integrale

Step 2: risolviamo l'eq integrale tramite fzn implicita o pto fisso dipendente dal parametro

Step 3: usiamo la sol trovata allo step 2 per costruire la curva stabile.

Step 1 caratterizziamo le soluzioni che restano in una bolla.

Lemma Sia $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sol di $(*)$ che resta in una bolla $B_R(0)$ per ogni tempo: $\|X(t)\| \leq C \quad \forall t \geq 0$. Allora $X(t)$ soddisfa

$$(**) \quad \boxed{X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} f(X(s)) \\ 0 \end{pmatrix} ds - \int_t^{+\infty} e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ g(X(s)) \end{pmatrix} ds}$$

dove $A = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Viceversa, ogni sol di $(**)$ è soluzione di $(*)$ che resta definitivamente in un intorno dell'origine.

dim $\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + f(x,y) \\ \dot{y} = +\mu y + g(x,y) \end{cases} \Rightarrow \dot{X}(t) = AX + F(X)$

$$F(X) = \begin{pmatrix} f(X) \\ g(X) \end{pmatrix}, \quad X = (x,y)$$

Duhamel: $\quad X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} F(X(s))\,ds$

in componenti $\quad \begin{cases} x(t) = e^{-t\lambda} x_0 + \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} f(x(s), y(s))\,ds \\ y(t) = e^{t\mu} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mu} g(x(s), y(s))\,ds \end{cases}$

guardiamo la 2ª equazione. Allora

$$e^{-t\mu} y(t) = y_0 + \int_0^t e^{-s\mu} g(x(s), y(s))\,ds$$

siccome per ipotesi la sol resta in un intorno di 0 $\forall t$,

$$|e^{-t\mu} y(t)| \le e^{-t\mu} |y(t)| \le e^{-t\mu} R \to 0 \quad t \to +\infty$$

quindi l'integrale converge quando $t \to +\infty$ e vale che

$$0 = y_0 + \int_0^{+\infty} e^{-s\mu} g(x(s), y(s))\,ds$$

che determina il dato iniziale. Sostituisco nell'eq di $y(t)$

$$y(t) = -e^{t\mu} \int_0^{\infty} e^{-s\mu} g(x(s), y(s))\,ds + \int_0^t e^{(t-s)\mu} g(x(s), y(s))\,ds$$

$$= -\int_t^{+\infty} e^{(t-s)\mu} g(x(s), y(s))\,ds$$

Quindi otteniamo che

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)\lambda} & 0 \\ 0 & e^{(t-s)\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(X(s)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \int_t^{+\infty} \left(\quad \right) \begin{pmatrix} 0 \\ g(X(s)) \end{pmatrix} ds$$

che è (**).

Viceversa, presa (**) basta calcolare la derivata e vedere che soddisfa (*) e, ripercorrendo la dimostrazione al contrario, che è limitata (esercizio di Dettagli)

<u>Step 2</u>: <u>punto fisso</u>. Abbiamo ottenuto che le sol limitate di (*) soddisfano l'eq (**), che scriviamo come pto fisso: con parentesi

$$\begin{cases} X(t) = T(x_0, X(t)) \\ T(x_0, X(t)) = e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} f(X(t)) \\ 0 \end{pmatrix} dt - \int_t^{+\infty} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ g(X(s)) \end{pmatrix} ds \end{cases}$$

Per trovare una soluzione al problema, usiamo il teo delle contrazioni. Innanzitutto ci serve uno sp di Banach

$$C_{x_0,\gamma} = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in C^0([0,+\infty), \mathbb{R}^2) \text{ tc } x(0) = x_0 \right.$$

$$\left. \|X(\cdot)\|_\gamma := \sup_{t\geq 0} e^{\gamma t}\|X(t)\| < +\infty \right\}$$

ESERCIZIO: $C_{x_0,\gamma}$ è di Banach

<u>OSS</u> Qui stiamo aggiungendo la condizione che

$$\sup_{t\geq 0} e^{\gamma t}\|X(t)\| \leq C < +\infty.$$

che ci serve perché ci dice che le sol $X(t) \to 0$! con attinttore con velocità esponenziale! Infatti: se $\|X(t)\|_\gamma < +\infty$, allora

$$e^{\gamma t}\|X(t)\| \leq \|X\|_\gamma \Rightarrow \|X(t)\| \leq e^{-\gamma t}\|X\|_\gamma$$

Mostreremo ora che se $|x_0|$ è suff. piccolo e $\gamma < \mu$, allora $T(x_0, \cdot)$ mappa una balla di $C_{x_0,\gamma}$ in sé ed è una contrazione.

Sia allora $B^\gamma(R) = \{ X \in C_{x_0,\gamma}$ tc. $\|X\|_\gamma \le R \}$

Lemma: sia $\gamma < \lambda$, $\exists\ \delta, R > 0$ tc. $\forall\ |x_0| < \delta$, la mappa

$$T_{x_0} : B^\gamma(R) \longrightarrow B^\gamma(R)$$
$$X(t) \longmapsto T_{x_0}(X(t)) := T(x_0, X(t))$$

è una contrazione.

dim: ① T_{x_0} mappa una bolla in sé:

Dobbiamo mostrare che se $X(t) \in B^\gamma(R)$, allora $T_{x_0}(X(t)) \in B^\gamma(R)$

$$T_{x_0}(X(t)) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t\lambda} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{T_1} + \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)\lambda} f(X(s)) \\ 0 \end{pmatrix} ds}_{T_2} - \underbrace{\int_t^{+\infty} e^{(t-s)\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ g(X(s)) \end{pmatrix} ds}_{T_3}$$

$$\|T_1(X(t))\|_\gamma = \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \| e^{-t\lambda} x_0 \| = \sup_{t \geq 0} e^{(\gamma-\lambda)t} \|x_0\| \leq \delta$$

$$\|T_2(X(t))\|_\gamma = \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \int_0^t \| e^{-(t-s)\lambda} f(X(s)) \| ds \leq$$

$\|f(X)\| \le K \|X\|^2$

$$\frac{1 - e^{-(\gamma-\lambda)t}}{\lambda - \gamma}$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} K \|X(s)\|^2 ds$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} K e^{-2\gamma s} \|X\|_\gamma^2$$

$$\leq \Big(\underbrace{\sup_{t \geq 0} e^{(\gamma-\lambda)t} \int_0^t e^{(\lambda-\gamma)s} ds}\Big) K \|X\|_\gamma^2$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} \left(e^{(\gamma-\lambda)t} \left. \frac{e^{(\lambda-\gamma)s}}{\lambda - \gamma} \right|_0^t \right) K \|X\|_\gamma^2$$

$$e^{(\gamma-\lambda)t} \left(\frac{e^{(\lambda-\gamma)t}}{\lambda-\gamma} \right)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda - \gamma} K \|X\|_\gamma^2$$

$$\|T_3(X(t))\|_\gamma = \sup_{t\geq 0} e^{t\gamma} \int_t^{+\infty} e^{(t-s)\mu} \, |g(X(s))| \, ds \leq$$

$$\leq \sup_{t\geq 0} e^{t\gamma} \int_t^{+\infty} e^{(t-s)\mu} K_2 \, \|X(s)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \, ds$$

$$\leq \sup_{t\geq 0} e^{t\gamma} \int_t^{+\infty} e^{t\mu} e^{-s\mu} K_2 \, e^{-2\gamma s} \, \|X\|_\gamma^2 \, ds$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq 0} e^{t(\mu+\gamma)} \int_t^{+\infty} e^{-s(\mu+\gamma)} \, ds \right) K_2 \|X\|_\gamma^2$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq 0} e^{t(\mu+\gamma)} \left. -\frac{e^{-s(\mu+\gamma)}}{\mu+\gamma} \right|_t^{+\infty} \right) K_2 \|X\|_\gamma^2$$

$$\sup_{t\geq 0} \left(e^{t(\mu+\gamma)} \frac{e^{-t(\mu+\gamma)}}{\mu+\gamma} \right) K_2 \|X\|_\gamma^2$$

$$\leq \frac{1}{\gamma+\mu} K_2 \|X\|_\gamma^2 .$$

Ne segue che

$$\|T_{x_0}(X)\|_\gamma \leq \|T_1(X)\|_\gamma + \|T_2(X)\|_\gamma + \|T_3(X)\|_\gamma$$

$$\leq \delta + \frac{K}{\gamma-\lambda} R^2 + \frac{K_2}{\gamma+\mu} R^2 \overset{?}{\leq} R$$

sì, a patto di prendere δ abb piccolo e anche R!

(c) T_{x_0} é contrazione:

Dobbiamo mostrare che $\|T_{x_0}(X_1) - T_{x_0}(X_2)\|_\gamma \leq \frac{1}{2} \|X_1 - X_2\|_\gamma$ per ogni $X_1, X_2 \in B^\gamma(R)$. Ma

$$T_{x_0}(X_1) - T_{x_0}(X_2) = \underbrace{\int_0^t e^{-(t-s)A} \begin{pmatrix} f(X_1(s)) - f(X_2(s)) \\ 0 \end{pmatrix} ds}_{T_2(X_1) - T_2(X_2)} - \underbrace{\int_t^{+\infty} e^{(t-s)\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ g(X_1) - g(X_2) \end{pmatrix}}_{T_3(X_1) - T_3(X_2)}$$

Ma è lo stesso, basta notare che f e g sono C^1 e quindi lipschitz: $\forall\, X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$ (5)

$$|f(X_1(s)) - f(X_2(s))| \leq \sup_{0 \leq \vartheta \leq 1} \|Df(\vartheta X_1 + (1-\vartheta)X_2)\| \; \|X_1 - X_2\|_{\mathbb{R}^2}$$

essendo $f'(0) = 0$ per ipotesi, può essere reso arbitrariamente piccolo a patto di prendere $\|X_1\|, \|X_2\|$ piccoli

$$\rightsquigarrow \quad |f(X_1) - f(X_2)| \leq \varepsilon \, \|X_1 - X_2\|_{\mathbb{R}^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad |f(X_1(s)) - f(X_2(s))| \leq \varepsilon \, \|X_1(s) - X_2(s)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \varepsilon \, e^{-\gamma s} \|X_1 - X_2\|_\gamma$$

Lo stesso vale per g. Ma allora

$$\|T_{\infty}(X_1) - T_{\infty}(X_2)\|_\gamma \leq \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \|T_{x_0}(X_1(t)) - T_{x_0}(X_2(t))\|_{\mathbb{R}^2}$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} \varepsilon\, e^{-\gamma s} \|X_1 - X_2\|_\gamma \, ds$$

$$+ \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} \int_t^{+\infty} e^{(t-s)\mu} \varepsilon\, e^{-\gamma s} \|X_1 - X_2\|_\gamma \, ds$$

$$\leq \left[\sup_{t \geq 0} e^{(\gamma - \lambda)t} \int_0^t e^{(\lambda - \gamma)s} ds\right] \varepsilon \|X_1 - X_2\|_\gamma$$

$$+ \left[\sup_{t \geq 0} e^{(\gamma + \mu)t} \int_t^{+\infty} e^{-(\gamma+\mu)s} ds\right] \varepsilon \|X_1 - X_2\|_\gamma$$

$$\leq \left(\frac{1}{\gamma - \lambda} + \frac{1}{\lambda + \gamma}\right) \varepsilon \|X_1 - X_2\|_\gamma \leq \frac{1}{2} \|X_1 - X_2\|_\gamma$$

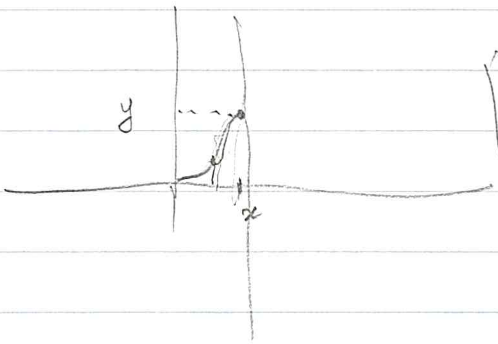
$\square$

Step 3 Definizione della curva stabile.

Il lemma precedente ci dice che $\forall\ \bar{x}$ fissato con $|\bar{x}| < \delta$, $\exists !$ soluzione $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ con $x(0) = \bar{x}$ t.c. $(*)$ tale che

$$X(t) \xrightarrow{t \to +\infty} (0,0)$$ con velocità esponenziale.

Allora definiamo $u(\bar{x}) := y(0)$ → il valore della 2ª componente di $X(0)$.



$\boxed{\text{Quindi } (\bar{x}, u(\bar{x})) \text{ è l'unico dato iniziale con } x = \bar{x} \text{ il cui flusso tende a } 0!}$

Ovviamente si ha che

$$\phi^t((x, u(x))) \equiv X(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$$

quindi ciascun punto sulla curva tende a 0,

OSS Si può anche dimostrare che $x \mapsto u(x)$ è C^1 e che $u'(0) = 0$.
Questo segue dal fatto che la mappa $T(x_0, X)$ dipende in maniera C^1 dalle sue variabili (è un po' + complicato mostrarlo) e che il teo di punto fisso con parametri preserva la regolarità della dipendenza del pto fisso dai parametri.

OSS Il teorema vale in qualsiasi dimensione, ma $W^s_{loc}(\delta)$ e $W^u_{loc}(\delta)$ sono varietà di più dimensioni.

Varietà stabile globale Possiamo estendere la varietà stabile ed instabile locale ad oggetti globali, seguendo il flusso!

$$W^s_{gl} = \bigcup_{t \geq 0} \phi^{-t}(W^s_{loc}(\mathcal{U})) \ ; \quad W^u_{gl} = \bigcup_{t \geq 0} \phi^{t}(W^u_{loc}(\mathcal{U}))$$

Se $X \in W^s_{gl}$, $\exists\ t_X$ t.c. $\phi^{t_X}(X) \in W^s_{loc}(\mathcal{U})$, dunque $\phi^t(X) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$.